



தமிழ்நாடு அரசு வேலைவாய்ப்பு மற்றும் பயிற்சித்துறை

பிரிவு : TNPSC Group I தேர்வு
பாடம் : பொதுக் கணிதம் மற்றும் அறிவுக்கூர்மை
பகுதி : **நிகழ்தகவு**

காப்புரிமை

தமிழ்நாடு அரசுப் பணியாளர் தேர்வாணையம் குரூப்-1 முதல்நிலை மற்றும் முதன்மை தேர்வுகளுக்கான கானொலி காட்சி பதிவுகள், ஒலிப்பதிவு பாடக்குறிப்புகள், மாதிரி தேர்வு வினாத்தாள்கள் மற்றும் மென்பாடக்குறிப்புகள் ஆகியவை போட்டித் தேர்விற்கு தயாராகும் மாணவ, மாணவிகளுக்கு உதவிடும் வகையில் வேலைவாய்ப்பு மற்றும் பயிற்சித் துறையால் மென்பொருள் வடிவில் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இம்மென்பாடக் குறிப்புகளுக்கான காப்புரிமை வேலைவாய்ப்பு மற்றும் பயிற்சித் துறையைச் சார்ந்தது என தெரிவிக்கப்படுகிறது.

எந்த ஒரு தனிநபரோ அல்லது தனியார் போட்டித் தேர்வு பயிற்சி மையமோ இம்மென்பாடக் குறிப்புகளை எந்த வகையிலும் மறுபிரதி எடுக்கவோ, மறு ஆக்கம் செய்திடவோ, விற்பனை செய்யும் முயற்சியிலோ ஈடுபடுதல் கூடாது. மீறினால் இந்திய காப்புரிமை சட்டத்தின் கீழ் தண்டிக்கப்பட ஏதுவாகும் என தெரிவிக்கப்படுகிறது. இது முற்றிலும் போட்டித் தேர்வுகளுக்கு தயார் செய்யும் மாணவர்களுக்கு வழங்கப்படும் கட்டணமில்லா சேவையாகும்.

ஆணையர்,

வேலைவாய்ப்பு மற்றும் பயிற்சித் துறை

நிகழ்தகவு

அறிமுகம்

நம்முடைய வாழ்க்கைச் சூழல்களில் சில உறுதியற்ற பண்புகளைக் கொண்ட நிகழ்வுகளைக் காண்பதன் மூலம் நிகழ்தகவு என்ற கருத்தினைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்ட ஒரு நோயாளிக்கு உயிர் காக்கும் மருந்து ஒன்றைக் கொடுக்க இருப்பதாகக் கொள்வோம். நோயாளியின் உறவினர்கள் அந்த மருந்து எவ்வாறு வேலை செய்யும் என்பதைப் பற்றிய நிகழ்தகவை அறிய விரும்பலாம். 100 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் 80-க்கும் மேற்பட்ட நோயாளிகளுக்கு மருந்து சிறப்பாக வேலை செய்துள்ளது என மருத்தவர் கூறினால் அவர்கள் மகிழ்ச்சி அடைவார்கள். இந்த வெற்றிச் சதவீதமே நிகழ்தகவு என்ற கருத்தின் விளக்கமாகும். இது நிகழ்வுகளின் செறிவை (நிகழ்வெண்) அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது உறுதியற்ற சூழலில் ஒருவர் முடிவை எடுப்பதற்கு (அடைவதற்கு) உதவி செய்கிறது. ஆகவே நிச்சயமற்றவற்றைக் கணக்கிடும் அல்லது அளவிடும் வழி முறைகூடிய நிகழ்தகவு ஆகும்.

சீட்டாட்டக் கட்டின் 52 சீட்டுகளைப் பற்றி நாம் நன்கு அறிந்திருக்கிறோம். அது ஹார்ட், கிளாவர், டைமண்ட், ஸ்பேடு (Hearts, Clover, Diamonds, Spades) என நான்கு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையும் 13 சீட்டுகளைக் கொண்டது. இதில் ஏதேனும் ஒரு வகையைத் தேர்ந்தெடுப்போதம் (ஸ்பேடு எனக் கொள்க). அவற்றை நன்கு கலைத்து அதில் இருந்து ஏதேனும் ஒரு சீட்டை எடுக்க அது இராசா சீட்டாக இருக்க வாய்ப்பு என்ன? நீங்கள் இராசா சீட்டிற்குப் பதிலாக ஓர் ஏஸ் சீட்டை விரும்புகிறீர்கள் எனில் உங்கள் வாய்ப்பு மாறுமா? இரண்டு வகைகளிலுமே உங்களுக்கான வாய்ப்பு 13 இல் 1 என்பதை உடனடியாகக் காண முடிகிறது (ஏன்?). வேறு ஏதேனும் ஒரு சீட்டை நீங்கள் தேர்ந்தெடுப்பதாக இருந்தாலும் இந்த வாய்ப்பு மாறாது. நிகழ்தகவு என்பது துல்லியமாக மாறாத மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும் வாய்ப்பு எனப் பொருள்படும். ஆனால் 13 இல் 1 என்பதற்குப் பதிலாக நாம் 1/13 எனப் பின்னமாக எழுதுகிறோம். (நிகழ்தகவுகளை இணைத்துக் கையாளும் போது பின்னமாக எழுதுதல் மிக எளிமையாக இருக்கும்). இது சாதகமான விளைவுகளுக்கும் சாத்தியமான (மொத்த) விளைவுகளுக்கும் உள்ள ஒரு விகிதமாகும்.

நீங்கள் பகடையைப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? ஒரு தரமான பகடை என்பது கனச்சதுர வடிவில் ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 முதல் 6 வரை உள்ள வேறுபட்ட எண்களைக் கொண்டிருக்கும். இது சூதாட்டங்களிலும் வாய்ப்புகளோடு தொடர்புடைய வேறு ஆட்டங்களிலும் உருட்டப்படுகிறது.

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 5 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இதேபோல் 2 மற்றும் 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? மேற்கண்ட அனைத்து வினாக்களுக்கான விடைகளிலும் நிகழ்தகவு என்ற கருத்துக்கான சிறப்புத்தன்மை எதையும் நீங்கள் கவனித்தீர்களா? அதிகப்பட்ச மதிப்பு மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு என எதையும் நீங்கள் குறிப்பிட முடியும்?

உறுதியாக நடக்கும் ஒரு நிகழ்விற்கான நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்க முடியும்? இதைத் தெளிவாக உணரப் பின்வரும் பத்திகளில் முறைப்படுத்துவோம்.

தொன்மை அணுகுமுறை (Classical Approach)

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பை, எண் மதிப்பால் குறிப்பிடுவதே நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பானையில் 4 சிவப்புப் பந்துகள் மற்றும் 6 நீலப்பந்துகள் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

- சமவாய்ப்பு என்ற சொல்லானது பானையில் உள்ள 10 பந்துகளும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்காக சம வாய்ப்புகளைப் (அதாவது நிகழ்தகவு) பெற்றிருக்கிறது என உறுதியளிக்கிறது.
- உங்கள் கண்களானது கட்டப்பட்டு இருப்பதாகவும் பந்துகள் கலைக்கப்பட்டு இருப்பதாகவும் கருதுவோம். இது விளைவுகளைச் சமவாய்ப்பு உடையதாக ஆக்குகிறது.
- சிவப்புப் பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு நிகழ்தகவு $4/10$ ஆகும். (இதை $2/5$ அல்லது 0.4 என எழுதலாம்).
- நீல நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இது $6/10$ ஆகும். ($3/5$ அல்லது 0.6).
- இது நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் ஊர என்பதைக் காண்க. இதன் பொருள் வேறு ஒரு விளைவு கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பதாகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் பயன்படுத்திய அணுகுமுறை தொன்மையானது. இது ஒரு முன்னறி நிகழ்தகவு (Priori Probability) கணக்கீடாகும். (இலத்தீன் மொழியில் Priori என்றால் 'ஆராய்வு இல்லாமல்' அல்லது உணர்ச்சி அனுபவம் என்று பொருள்). விளைவுகள் சம வாய்ப்புள்ளவையாக இருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட செயல் நடக்க இயலும் என்பதைக் கவனிக்க.

தொன்மை நிகழ்தகவு என்பது 17 மற்றும் 18 ஆம் நூற்றாண்டுகளில் கணிதவியலாளர்களால் முதன் முதலில் படிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகும். எனவே தான் அது அவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

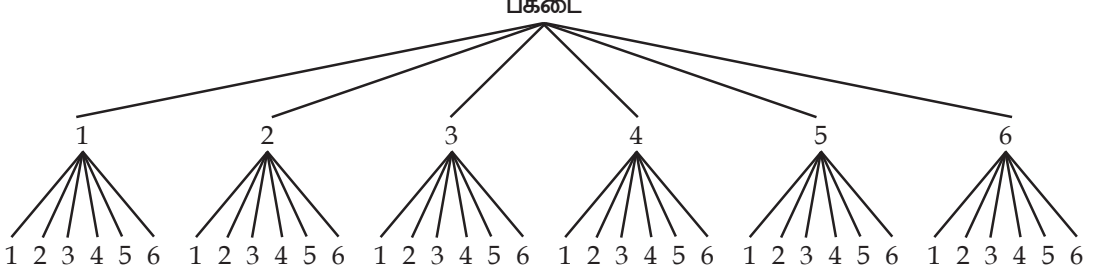
- S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் கணம் என்க.
- S என்பது அச்சோதனையின் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது.
- E என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்பு என்க.
- E என்பது நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது.
- E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$P(E) = N(E)/N(S)$$

ஒரு சோதனையானது திரும்பத்திரும்பப் பலமுறை செய்யப்படும் போது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவானது, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் நிகழும் எனில் அந்தக் குறிப்பிட்ட சதவீதம் அந்த விளைவிற்கான நிகழ்தகவிற்கு மிக அருகில் இருக்கும் என நிகழ்தகவுக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு கூறுகிறது.

1. மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியை எழுதுக.

தீர்வு:



அதனால் கூறுவெளியை = $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
 $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
 $(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

2. இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. கிடைக்கப்பெறும் முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 1) 4-க்குச் சமம், 2) 10-ஐ விடப் பெரிதாக, 3) 13-ஐ விடக்குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி, $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$

..... $(6, 6)\}$ என இருக்கும்.

எனவே $n(S) = 36$.

1) 4-க்குச் சமம்

A ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4-ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}; n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

2) 10-ஐ விடப் பெரிதாக

B ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 10-ஐ விடப் பெரிதாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}; n(B) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3) 13-ஐ விடக்குறைவாக

C ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 13-ஐ விடக்குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(C) = 36$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1.$$

3. இரண்டு நாணயங்கள் ஒன்றாகச் சண்டப்படுகின்றன. இரண்டு நாணயங்களிலும் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு:

இரண்டு நாணயங்கள் ஒன்றாகச் சண்டப்படும் பொழுது அதன் கூறுவெளியானது

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}; \quad n(S) = 4$$

A ஆனது நாணயங்களிலும் வெவ்வேறு முகங்கள் கொண்ட நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{ HT, TH \}; \quad n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது 1) சிவப்பு நிறச்சீட்டு, 2) ஹார்ட் சீட்டு, 3) சிவப்பு நிற இராசா, 4) முக சீட்டு, 5) எண் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு:

1) சிவப்பு நிறச்சீட்டு

A என்பது சிவப்புச் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 26

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

2) ஹார்ட் சீட்டு

B என்பது ஹார்ட் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 13

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

3) சிவப்பு நிற இராசா

C என்பது சிவப்பு இராசா சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 2

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

4) முக சீட்டு

D என்பது முக சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 4 \times 3 = 12$ (J, K, Q)

$$P(d) = \frac{n(d)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

5) எண் சீட்டு

E என்பது எண் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 4 \times 9 = 36$ (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}.$$

4. ஒரு நெட்டாண்டில் 53 சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு:

52 வாரங்களில், 52 சனிக்கிழமைகள் கிடைத்து விடும்.

மீதமுள்ள இரண்டு நாட்களுக்கான வாய்ப்புகள் கீழ்க்காணும் கூறுவெளியில் கிடைக்கும்.

$S = \{ (\text{ஞாயிறு-திங்கள்}), (\text{திங்கள்-செவ்வாய்}), (\text{செவ்வாய்-புதன்}),$
 $(\text{புதன்-வியாழன்}), (\text{வியாழன்-வெள்ளி}), (\text{வெள்ளி-சனி}), (\text{சனி-ஞாயிறு}) \}$

$$n(S) = 7$$

A என்பது 53வது சனிக்கிழமை கிடைக்கும் எனில் $= \{ (\text{வெள்ளி-சனி}), (\text{சனி-ஞாயிறு}) \} = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

5. ஒரு பகடை உருட்டப்படும் அதே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் சுண்டப்படுகிறது. பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கும், நாணயத்தில் தலைக் கிடைப்பதற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு:

$S = \{ 1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T \}$

$$n(S) = 12.$$

A ஆனது ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் தலைக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{ 1H, 3H, 5H \}; \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

6. ஒரு பையில் 6 பச்சை நிறப்பந்துகளும், சில கருப்பு மற்றும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை, சிகப்பு பந்துகளைப் போல இருமடங்காகும். பச்சை பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சிகப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப் போல் மூன்று மடங்காகும். இவ்வாறெனில், 1) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை, 2) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

பச்சை பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 6

சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை = x

எனவே, கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை = $2x$

மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை = $6 + x + 2x = 6 + 3x$

$$P(G) = 3 \times P(R)$$

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

$$6 = 3x \quad \therefore x = 2.$$

1) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை = $2 \times 2 = 4$

2) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை = $6 + (3 \times 2) = 12$.

7. அம்புக்குறி விளையாட்டில் 1, 2, 3, ..., 12 என்ற எண்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் கிடைக்க வாய்ப்புள்ளது. அம்புக்குறியானது 1) 7, 2) பகா எண், 3) பகு எண் ஆகியவற்றில் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டறிக.

தீர்வு:

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

$$n(S) = 12$$

1) 7-ல் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி

A ஆனது, அம்புக்குறி எண் 7-ல் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

2) பகா எண்

B ஆனது, அம்புக்குறி பகா எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி = $\{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

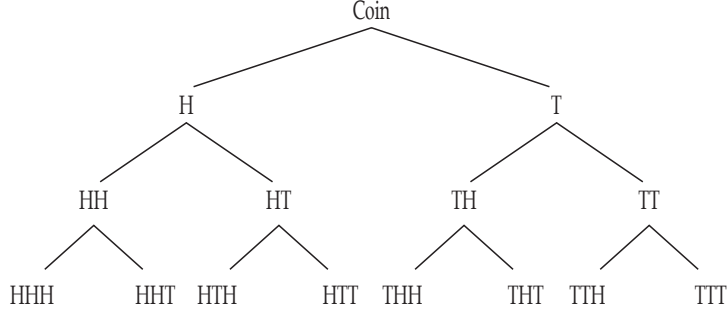
3) பகு எண்

C ஆனது, அம்புக்குறி பகு எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி = $\{ 4, 6, 8, 10, 12 \}$; $n(C) = 6$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

8. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டப்படும் பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளியை மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதுக.

தீர்வு:



$$\text{கூறுவெளி, } S = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{HHH,} & \text{HHT,} & \text{HTH,} & \text{HTT} \\ \text{THH,} & \text{THT,} & \text{TTH,} & \text{TTT} \end{array} \right\}$$

9. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. இங்கு $P(A) : P(\bar{A}) = 17$ மற்றும் $n(S) = 640$ எனில், i) $P(\bar{A})$, ii) $n(A)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{17}{15}; \quad n(S) = 640; \quad P(A) = 17x; \quad P(\bar{A}) = 15x$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow 17x + 15x = 1$$

$$32x = 1, \quad x = \frac{1}{32}$$

i) $P(\bar{A})$,

$$P(\bar{A}) = 15x = \frac{15}{32}$$

ii) $n(A)$,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} \\ &= \frac{17}{32} = \frac{n(A)}{640} \end{aligned}$$

$$n(A) = \frac{17}{32} \times 640 = 340.$$

10. ஒரு பொது விழாவில் 1 முதல் 1000 வரை எண்களிட்ட அட்டைகள் ஒரு பொட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. விளையாடும் ஒவ்வொருவரும் ஒரு அட்டையைச் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கிறார்கள். எடுத்த அட்டை திரும்ப வைக்கப்படவில்லை. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அட்டையில் எண் 500ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண் இருந்தால், அவர் வெற்றிக்கான பரிசைப் பெறுவார். 1) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற, 2) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(S) = 1000$$

1) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற

A ஆனது, முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெறுதற்கான நிகழ்ச்சி = { 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961 }; $n(A) = 9$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{1000}$$

2) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற

தீர்வு:

B ஆனது, முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி

பெறுதற்கான நிகழ்ச்சி = 8

இங்கு; $n(S) = 999$ (\therefore முதலாமவர் வெற்றி); $n(B) = 8$

$$P(B) = \frac{8}{999}$$

11. ஒரு பையில் 12 நீல நிறப்பந்துகளும், x சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. 1) அது சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. 2) 8 புதிய சிவப்பு நிறப்பந்துகள் அப்பையில் வைத்த பின்னர், ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது (1)-யில் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்கு எனில், x -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(S) = 12 \text{ நீல பந்துகள்} + x \text{ சிவப்பு பந்துகள்} = 12 + x \text{ பந்துகள்.}$$

1) A ஆனது, சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனில் $n(A) = x$

$$P(A) = \frac{x}{12 + x} \rightarrow (1)$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

2) இங்கு, $n(S) = 12$ நீல பந்துகள் + x சிவப்பு பந்துகள் + 8 சிவப்பு பந்துகள்

$$n(S) = 20 + x \text{ பந்துகள்}$$

B ஆனது, சிவப்பு நிறப்பந்துகளை பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி எனில் $= x + 8$

$$P(B) = \frac{x+8}{20+x}$$

$$P(B) = 2(P(A))$$

$$\frac{x+8}{20+x} = \frac{2(x)}{12+x}$$

$$(x+8)(12+x) = 40x + 2x^2$$

$$12x + x^2 + 96 + 8x = 40x + 2x^2$$

$$x^2 + 96 + 20x = 40x + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 + 20x - 96 = 0$$

$$x^2 + 20x - 96 = 0$$

$$x = 4; \quad x = -24;$$

$$\therefore x\text{-ன் மதிப்பு} = 4 \rightarrow (2)$$

$$\text{Sub (2) in (1)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

12. இரண்டு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. 1) இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்க, 2) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்கலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க, 3) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க, 4) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1-ஆக இருக்க, ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(S) = 36$$

1) இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்க

ஆகையால், ஒரே முகமதிப்பு கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சிகள் = $\{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்கலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க

ஆகையால், பெருக்கற்கலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க B -ன் நிகழ்ச்சிகள் = $\{ (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (1, 5), (5, 1) \}$

$$n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க. ஆகையால்,

கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க C -ன் நிகழ்ச்சிகள் = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (5, 2), (2, 5),
(1, 6), (6, 1), (3, 4), (4, 3), (6, 5),
(5, 6), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) }

$$n(C) = 15$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

4) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1-ஆக இருக்க

ஆகையால், கூடுதல் 1-ஆக இருக்க D -ன் நிகழ்ச்சிகள் 1 = 0

$$P(D) = 0.$$

13. மூன்று சீரான நாயணங்கள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. 1) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க 2) குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க 3) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க 4) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(s) = 8 \{ (HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TT) \}$$

1) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க

அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சிகள் = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

2) குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க

குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க B -ன் நிகழ்ச்சிகள் = 7

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

3) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க

அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க C -ன் நிகழ்ச்சிகள் = 4 { HTT, THT, TTH, TTT }

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

4) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க

அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க D -ன் நிகழ்ச்சிகள் = 7

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

14. இரண்டு பகடைகளில் ஒன்றில் 1,2,3,4,5,6 என்றும் மற்றொரு பகடையில் 1,1,2,2,3,3 என்றும் முக மதிப்புகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அவை இரண்டும் உருட்டப்படும் போது கிடைக்கும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 2 முதல் 9 வரை ஒவ்வொரு மதிப்பும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{கூறுவெளி} = & \{(1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 3) \\ & (2, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 3) \\ & (3, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 3) \\ & (4, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 2), (4, 3), (4, 3) \\ & (5, 1), (5, 1), (5, 2), (5, 2), (5, 3), (5, 3) \\ & (6, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 2), (6, 3), (6, 3)\} \end{aligned}$$

1) கூடுதல் 2 கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சி

$$P(A) = 2 \{ (1, 1), (1, 1) \}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

2) கூடுதல் 3 கிடைக்க B -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1) \}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

3) கூடுதல் 4 கிடைக்க C -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (1, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 2) \}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4) கூடுதல் 5 கிடைக்க D -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (2, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 1) \}$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

5) கூடுதல் 6 கிடைக்க E -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (3, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 1) \}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

6) கூடுதல் 7 கிடைக்க F -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (4, 3), (4, 3), (5, 2), (5, 2), (6, 1), (6, 1) \}$$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

7) கூடுதல் 8 கிடைக்க G -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (5, 3), (5, 3), (6, 2), (6, 2) \}$$

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

8) கூடுதல் 9 கிடைக்க H -ன் நிகழ்ச்சி

$$= \{ (5, 3), (5, 3), (6, 2), (6, 2) \}$$

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

15. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு நிறப்பந்துகளும், 6 வெள்ளை நிறப்பந்துகளும், 7 பச்சை நிறப்பந்துகளும் மற்றும் 8 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்தப்பந்து 1) வெள்ளை 2) கருப்பு அல்லது சிவப்பு 3) வெள்ளையாக இல்லாமல் 4) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(S) = 5+6+7+8 = 26$$

1) வெள்ளை

வெள்ளை பந்து கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சி = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}.$$

2) கருப்பு அல்லது சிவப்பு

கருப்பு அல்லது சிவப்பு கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சி = 8 + 5 = 13

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}.$$

3) வெள்ளையாக இல்லாமல் இருக்க

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

4) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருக்க

வெள்ளை அல்லது கருப்பு கிடைக்கமால் இருக்க C -ன் நிகழ்ச்சி = 6 + 8 = 14

$$P(C) = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}.$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{13}.$$

$$= \frac{6}{13}.$$

16. நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில், டைமண்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராசா மற்றும் இராணி சீட்டுகளும், ஹார்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகளும், ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து மந்திரி மற்றும் இராசா சீட்டுகளும் நீக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள சீட்டுகளிலிருந்து ஒரு சீட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. அந்த சீட்டானது 1) க்ளாவர் ஆக, 2) சிவப்பு இராணியாக, 3) கருப்பு இராசாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

ஹார்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டு = 2

ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து மந்திரி மற்றும் இராசா சீட்டு = 2

டைமண்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராசா மற்றும் இராணி சீட்டு = 2

$$n(S) = 52 - 6 = 46.$$

1) க்ளாவர் ஆக

க்ளாவர் கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சி = 13

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{46}.$$

2) சிவப்பு இராணியாக

சிவப்பு இராணியாக இருப்பதற்கு B -ன் நிகழ்ச்சி = 0

3) கருப்பு இராசாவாக இருப்பதற்கு

கருப்பு இராசாவாக இருப்பதற்கு C -ன் நிகழ்ச்சி = 1

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{46}.$$

இரண்டு நுகர்வோர்கள் பிரியா மற்றும் அமுதன் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடிக்கு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் (திங்கள் முதல் சனி வரை) செல்கிறார்கள். அவர்கள் அங்காடிக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நாளும் செல்கிறார்கள். இருவரும் அங்காடிக்கு 1) ஒரே நாளில், 2) வெவ்வேறு நாட்களில், 3) அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி, $S = \{ (திங்கள், திங்கள்) (திங்கள், செவ்வாய்) (திங்கள், புதன்) \dots\dots\dots (சனி, சனி) \}$

$$N(S) = 36.$$

1) இருவரும் அங்காடிக்கு ஒரே நாளில் A -ன் நிகழ்ச்சி = 6

$\{ (திங்கள், திங்கள்) (செவ்வாய், செவ்வாய்) (புதன், புதன்) (வியாழன், வியாழன்) (வெள்ளி, வெள்ளி) (சனி, சனி) \}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

2) வெவ்வேறு நாட்களில் அங்காடிக்கு செல்ல B -ன் நிகழ்ச்சி =
மொத்த நாட்கள் - மொத்த சமமான நாட்கள்

$$= 36 - 6 = 30$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

3) அடுத்தடுத்த நாட்களில் அங்காடிக்கு செல்ல C -ன் நிகழ்ச்சி

$= \{ (திங்கள், செவ்வாய்) (செவ்வாய், புதன்) (புதன், வியாழன்) (வியாழன், வெள்ளி) (வெள்ளி, சனி) \}$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

17. மாணவர்கள் விளையாடும் ஒரு விளையாட்டில் அவர்களால் எறியப்படும் கல்லானது வட்டப்பரிதிக்குள் விழுந்தால் அதைத் வெற்றியாகவும், வட்டப்பரிதிக்கு வெளியே விழுந்தால் அதை தோல்வியாகவும் கருதப்படுகிறது. விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு:

$$\text{செவ்வகத்தின் பரப்பளவு} = l \times w$$

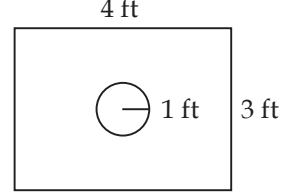
$$= 3 \times 4 = 12 \text{ ft}^2$$

$$\text{வட்டத்தின் பரப்பளவு} = \pi r^2 = \pi$$

விளையாட்டில் வெற்றி

$$\text{கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{\text{வட்டத்தின் பரப்பளவு}}{\text{செவ்வகத்தின் பரப்பளவு}}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$



18. ஒரு பெட்டியில் 20 குறைபாடில்லாத விளக்குகளும் ஒரு சில குறைபாடுடைய விளக்குகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு விளக்கானது குறைபாடுடையதாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $3/8$ எனில், குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

$$n(S) = 20 + x$$

$$\text{குறைபாடுடைய விளக்குகளின் நிகழ்தகவு, } P(D) = \frac{3}{8} = \frac{n(D)}{n(S)}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{n(D)}{20 + x} \quad (\therefore n(D) = x)$$

$$60 + 3x = 8n(D)$$

$$60 + 3x = 8x$$

$$60 + 5x = 60$$

$$x = 12$$

மொத்தத்தில் 12 குறைபாடுடைய விளக்குகள் .

19. ஒரு விளையாட்டிற்கான நுழைவுக் கட்டணம் 150. அந்த விளையாட்டில் ஒரு நாயணம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. தனா, ஒரு நுழைவுச் சீட்டு வாங்கினாள். அவ்விளையாட்டில் ஒன்று அல்லது இரண்டு தலைகள் விழுந்தால் அவள் செலுத்திய நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பக் கிடைத்துவிடும். மூன்று தலைகள் கிடைத்தால் அவளது நுழைவுக்கட்டணம் இரண்டு மடங்கு கிடைக்கும். இல்லையென்றால் அவளுக்கு எந்தக் கட்டணமும் திரும்பக் கிடைக்காது. இவ்வாறெனில் 1) இரண்டு மடங்காக, 2) நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பப்பெற, 3) நுழைவுக் கட்டணத்தை இழப்பதற்கு, ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$n(S) = 8$$

- 1) நுழைவுக்கட்டணம் இருமடங்காக கிடைக்க A -ன் நிகழ்ச்சி = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}.$$

- 2) நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பப்பெற B -ன் நிகழ்ச்சி

$$B = \{ HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH \}; \quad n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

- 3) நுழைவுக் கட்டணத்தை இழப்பதற்கு C -ன் நிகழ்ச்சி

$$C = \{ TTT \}; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{8}.$$